

13

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

Au chapitre 12, on a établi la cinématique et la dynamique du solide indéformable. Dans la première section de ce chapitre, on va calculer explicitement les moments d'inertie de certains solides indéformables par rapport à un axe principal d'inertie. La deuxième section est consacrée à la dynamique du solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe. La troisième section est consacrée aux gyroscopes et aux effets gyroscopiques.

13.1 Moments d'inertie

Par calculer le moment d'inertie d'un solide indéformable par rapport à un axe principal d'inertie, on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum dans une région de l'espace à trois dimensions qui correspond au volume V du solide indéformable. Dans ce cas, la somme discrète dans la définition (12.53) du moment d'inertie $I_{G,i}$ du solide indéformable exprimé par rapport à un axe Ge_i qui passe par le centre de masse G devient une intégrale sur le volume V du solide,

$$I_{G,i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,i}^2 \quad \longrightarrow \quad I_{G,i} = \int_V dm r^2 \quad (13.1)$$

où m_{α} est la masse et $r_{\alpha,i}$ est la distance du point matériel P_{α} à l'axe de rotation Ge_i , et dm_{α} est la masse d'un volume infinitésimal dV du solide et r est sa distance à l'axe de rotation Ge_i .

A l'aide de l'expression intégrale (13.1), on va à présent calculer explicitement le moment d'inertie de quelques solides indéformables réguliers. Ces solides réguliers sont une barre mince, un cylindre creux et un cylindre plein.

13.1.1 Barre mince

On considère une barre homogène de masse M très mince telle que son épaisseur e est négligeable par rapport à sa longueur L , c'est-à-dire $e \ll L$. Par conséquent, on peut considérer que toute la masse de la barre se trouve sur un segment de longueur L (Fig. 13.1).

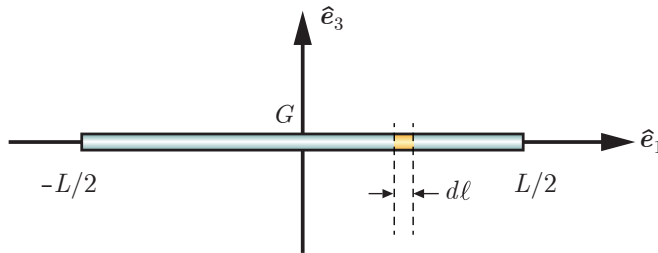


FIGURE 13.1 Barre très mince de longueur L , orientée selon l'axe Ge_1 , en rotation autour de l'axe vertical Ge_3 .

On désire calculer le moment d'inertie $I_{G,3}$ de la barre mince, orientée selon l'axe Ge_1 , qui

est en rotation dans le plan horizontal autour de l'axe vertical Ge_3 passant par son centre de masse G . Par conséquent, son moment d'inertie (13.1) s'écrit,

$$I_{G,3} = \int_{-L/2}^{L/2} dm \ell^2 \quad (13.2)$$

où $\ell \equiv r$ est la distance à l'axe le long de la barre. La densité linéique de la barre homogène ρ_ℓ est définie comme le rapport de la masse M de la barre et de sa longueur L ,

$$\rho_\ell = \frac{M}{L} \quad (13.3)$$

La masse infinitésimale dm s'écrit en termes de la longueur infinitésimale $d\ell$ comme,

$$dm = \rho_\ell d\ell = \frac{M}{L} d\ell \quad (13.4)$$

En substituant la relation (13.4) dans l'intégrale (13.2), le moment d'inertie $I_{G,3}$ devient,

$$I_{G,3} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \ell^2 d\ell = \frac{M}{L} \left. \frac{\ell^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} M L^2 \quad (13.5)$$

13.1.2 Cylindre creux

On considère un cylindre creux homogène de masse M , de hauteur L , de rayon R et d'épaisseur e très mince par rapport à son rayon, c'est-à-dire $e \ll R$, ce qui signifie que son rayon peut être considéré comme constant (Fig. 13.2).

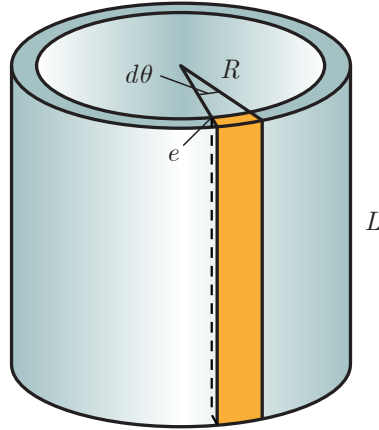


FIGURE 13.2 Cylindre creux de longueur L , de rayon R et d'épaisseur e en rotation autour de l'axe vertical Ge_3 .

On désire calculer le moment d'inertie $I_{G,3}$ du cylindre creux en rotation autour de l'axe vertical Ge_3 passant par son centre de masse G . Par conséquent, son moment d'inertie (13.1) s'écrit,

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

où $R \equiv r$ est le rayon constant du cylindre creux. On divise le cylindre creux en éléments de volumes infinitésimaux dV de hauteur L , d'épaisseur e et de largeur $R d\theta$ qui se situent à une distance R de l'axe vertical Ge_3 ,

$$dV = R L e d\theta \quad (13.7)$$

La densité volumique ρ du cylindre creux est définie comme le rapport de la masse M du cylindre et de son volume V ,

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (13.8)$$

Compte tenu des expressions (13.7) et (13.8), la masse infinitésimale dm s'écrit en termes du volume infinitésimal dV d'un parallélépipède comme,

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V} R L e d\theta \quad (13.9)$$

En substituant l'expression (13.9) de la masse infinitésimale dm dans l'intégrale (13.6), et en intégrant l'angle θ de 0 à 2π , le moment d'inertie $I_{G,3}$ devient,

$$I_{G,3} = \frac{M}{V} R^3 L e \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{M}{V} R^3 L e \quad (13.10)$$

Le volume V du cylindre creux est égal au produit de la circonférence $2\pi R$ des sections circulaires, de la longueur L et de l'épaisseur e ,

$$V = 2\pi R L e \quad (13.11)$$

En substituant l'expression (13.11) du volume du cylindre dans l'expression (13.10) du moment d'inertie $I_{G,3}$, ce dernier se réduit à,

$$I_{G,3} = M R^2 \quad (13.12)$$

13.1.3 Cylindre plein

On considère un cylindre plein homogène de masse M , de hauteur L et de rayon R (Fig. 13.2).

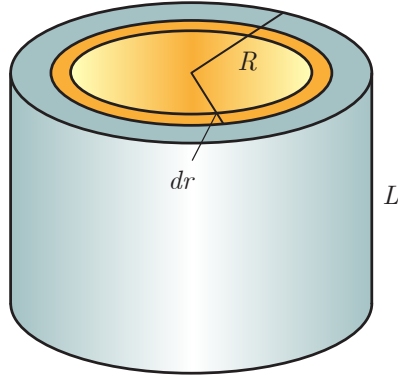


FIGURE 13.3 Cylindre plein de longueur L et de rayon R en rotation autour de l'axe vertical Ge_3 .

On désire calculer le moment d'inertie $I_{G,3}$ du cylindre plein en rotation autour de l'axe vertical Ge_3 passant par son centre de masse G . On divise le cylindre plein en cylindres creux concentriques de volumes infinitésimaux dV , de hauteur L , de circonférence $2\pi r$ et d'épaisseur dr ,

$$dV = 2\pi L r dr \quad (13.13)$$

Compte tenu des expressions (13.13) et (13.8), la masse infinitésimale dm s'écrit en termes du volume infinitésimal dV d'un cylindre creux comme,

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V} 2\pi L r dr \quad (13.14)$$

En substituant l'expression (13.14) de la masse infinitésimale dm dans l'intégrale (13.1), et en intégrant le rayon r de 0 à R , le moment d'inertie $I_{G,3}$ devient,

$$I_{G,3} = 2\pi \frac{M}{V} L \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{M}{V} L \left. \frac{1}{4} r^4 \right|_0^R = \frac{\pi}{2} \frac{M}{V} L R^4 \quad (13.15)$$

Le volume V du cylindre plein est égal au produit de la surface de la section πR^2 et de la longueur L ,

$$V = \pi R^2 L \quad (13.16)$$

En substituant l'expression (13.16) du volume du cylindre dans l'expression (13.15) du moment d'inertie $I_{G,3}$, ce dernier se réduit à,

$$I_{G,3} = \frac{1}{2} M R^2 \quad (13.17)$$



Cylindres roulant sur un plan incliné

Le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même taille et de même masse. Si ces deux cylindres roulent sans glisser le long d'un plan incliné, le cylindre plein aura une accélération angulaire plus grande que le cylindre creux. Ainsi, si ces cylindres sont lâchés en même temps de la même hauteur, le cylindre plein atteindra le bas du plan incliné avant le cylindre creux.

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

Dans cette section on va considérer la dynamique du solide indéformable lorsque le solide est en rotation autour d'un axe fixe $A \hat{e}_i$. Pour ce faire, on va commencer par énoncer le théorème d'Huygens-Steiner.

13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner

On cherche à déterminer le moment d'inertie $I_{A,i}$ d'un solide indéformable quelconque de masse M en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{e}_i$ autour d'un axe $A \hat{e}_i$ qui passe par le point A et qui est parallèle à l'axe principal d'inertie $G \hat{e}_i$. On désire l'exprimer en fonction du moment d'inertie $I_{G,i}$ supposé connu. Les axes $A \hat{e}_i$ et $G \hat{e}_i$ sont séparés d'une distance $d = \|\mathbf{AG}\|$. En prenant comme origine le point matériel A , le théorème de transfert du



Christian Huygens

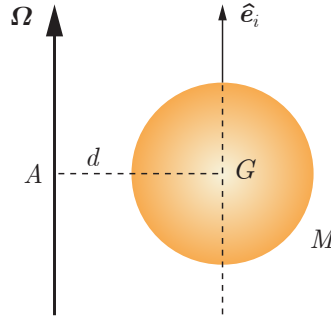


FIGURE 13.4 Solide de masse M en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ autour de l'axe $A \hat{e}_i$ qui est parallèle à l'axe principal d'inertie $G \hat{e}_i$ à distance d .

moment cinétique (12.19) s'écrit,

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AG} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_G \quad (13.18)$$

Comme le point matériel A appartient à l'axe de rotation, sa vitesse est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{V}_A = \mathbf{0}$. Compte tenu de la relation (12.5), la vitesse du centre de masse s'exprime en termes du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation du solide comme,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG} \quad (13.19)$$

En substituant l'équation (13.19) dans l'équation (13.18), le théorème de transfert du moment cinétique devient,

$$\mathbf{L}_A = M \mathbf{AG} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AG}) + \mathbf{L}_G \quad (13.20)$$

Compte tenu de l'identité vectorielle (1.44), le théorème de transfert du moment cinétique (13.20) devient,

$$\mathbf{L}_A = M \left(\mathbf{AG}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{AG} \right) + \mathbf{L}_G \quad (13.21)$$

Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ est colinéaire à l'axe de rotation fixe $A\hat{e}_i$ et orthogonal au vecteur $\mathbf{AG}$,

$$\mathbf{AG} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{AG}^2 = d^2 \quad (13.22)$$

Le théorème de transfert du moment cinétique (13.21) se réduit alors à,

$$\mathbf{L}_A = M d^2 \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L}_G \quad (13.23)$$

Comme le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{e}_i$ est colinéaire à l'axe de rotation fixe $A\hat{e}_i$, qui est parallèle à l'axe principal d'inertie Ge_i , les moments cinétiques $\mathbf{L}_A$ et $\mathbf{L}_G$ du solide indéformable sont exprimés respectivement en termes des moments d'inertie $I_{G,i}$ et $I_{A,i}$ comme,

$$\mathbf{L}_G = I_{G,i} \boldsymbol{\Omega} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{L}_A = I_{A,i} \boldsymbol{\Omega} \quad (13.24)$$

En substituant les équations (13.24) dans le théorème de transfert du moment cinétique (13.23), on obtient,

$$I_{A,i} \boldsymbol{\Omega} = (I_{G,i} + M d^2) \boldsymbol{\Omega} \quad (13.25)$$

Ainsi, le théorème de Huygens-Steiner, aussi connu sous les noms de théorème du transport parallèle ou théorème des axes parallèles, affirme que le moment d'inertie $I_{A,i}$ d'un solide indéformable de masse M en rotation autour d'un axe fixe Ae_i , qui est parallèle à l'axe principal d'inertie Ge_i est exprimé en termes du moment d'inertie $I_{G,i}$ et de la distance $d = \|\mathbf{AG}\| = \text{cste}$ comme,

$$I_{A,i} = I_{G,i} + M d^2 \quad (13.26)$$



Jakob Steiner

13.2.2 Energie cinétique du solide indéformable

Comme l'énergie cinétique (6.57) est une grandeur extensive, l'énergie cinétique T d'un solide indéformable est la somme des énergies cinétiques de tous les points matériels P_α qui le constituent,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 \quad (13.27)$$

Compte tenu de la relation (11.72), l'énergie cinétique (13.27) est mise sous la forme,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \mathbf{V}_G^2 + \mathbf{V}_G \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.28)$$

D'après les relations (11.65) et (11.74), l'énergie cinétique (13.28) se réduit à,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.29)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative T' du mouvement de rotation propre,

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 \quad (13.30)$$

Compte tenu des relations (11.72), (11.67) et (12.7), la vitesse relative $\mathbf{v}'_{\alpha}$ d'un point matériel P_{α} s'écrit,

$$\mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha} \quad (13.31)$$

D'après la première identité (1.41) et l'expression (13.31), la vitesse relative au carré est mise sous la forme,

$$\mathbf{v}'_{\alpha}{}^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) = \left(\mathbf{r}'_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.32)$$

En substituant l'identité (13.32) dans l'énergie cinétique relative (13.30), on obtient,

$$T' = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.33)$$

Compte tenu des relations (11.67) et (12.40), le moment cinétique angulaire $\mathbf{L}_G$ évalué par rapport au centre de masse s'écrit,

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\alpha}) \quad (13.34)$$

Ainsi, l'énergie cinétique relative (13.33) est exprimée en termes du moment cinétique (13.34) comme,

$$T' = \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.35)$$

Compte tenu de la quantité de mouvement (12.35) du solide indéformable et de l'énergie cinétique relative (13.35), l'énergie cinétique (13.29) prend la forme suivante,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + T' = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.36)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du centre de masse et le deuxième terme est l'énergie de rotation propre du solide. En utilisant l'expression (12.51) du moment cinétique $\mathbf{L}_G$ et l'expression (12.43) de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ dans le repère d'inertie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$, compte tenu de la relation d'orthonormalité des vecteurs unitaires du repère d'inertie, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ji}$, l'énergie cinétique relative (13.35) devient,

$$T' = \frac{1}{2} \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2 \quad (13.37)$$

A l'aide de l'énergie cinétique relative (13.37) et de la vitesse du centre de masse exprimée dans le repère d'inertie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$,

$$\mathbf{V}_G = \sum_{j=1}^3 V_{G,j} \hat{\mathbf{e}}_j \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{V}_G^2 = \sum_{j=1}^3 V_{G,j}^2 \quad (13.38)$$

l'énergie cinétique (13.36) du solide indéformable lors d'une rotation autour d'un axe quelconque devient,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 M V_{G,j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2 \quad (\text{axe quelconque}) \quad (13.39)$$

Dans le cas particulier où le solide est en rotation autour de l'axe principal d'inertie $G\mathbf{e}_i$, le vecteur vitesse angulaire s'écrit,

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \hat{\mathbf{e}}_j = \Omega \hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{ainsi} \quad \Omega_j = \Omega \delta_{ij} \quad (\text{axe principal d'inertie}) \quad (13.40)$$

Dans ce cas, compte tenu de la vitesse du centre de masse (13.38) et de la vitesse angulaire (13.40), l'énergie cinétique (13.39) se réduit à,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,i} \Omega^2 \quad (\text{axe principal d'inertie}) \quad (13.41)$$

13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Comme la masse M et les composantes du tenseur d'inertie $I_{G,j}$ sont des constantes, à l'aide de la vitesse du centre de masse (13.38), la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.39) s'écrit,

$$\dot{T} = M \dot{\mathbf{V}}_G \cdot \mathbf{V}_G + \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \dot{\Omega}_j \Omega_j \quad (13.42)$$

Compte tenu de la condition d'orthonormalité des vecteurs unitaires du repère d'inertie, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_{ji}$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.43) devient,

$$\dot{T} = M \dot{\mathbf{V}}_G \cdot \mathbf{V}_G + \sum_{j=1}^3 \left(I_{G,j} \dot{\Omega}_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \sum_{i=1}^3 (\Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i) \quad (13.43)$$

A l'aide du moment cinétique (12.51) et de sa dérivée temporelle (12.56), on déduit l'identité vectorielle suivante,

$$\left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \dot{\Omega}_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) = \left(\dot{\mathbf{L}}_G - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.44)$$

Compte tenu de l'identité vectorielle (13.44) et du fait que la masse M du solide indéformable est constante, ce qui implique que $\dot{\mathbf{P}} = M \dot{\mathbf{V}}_G$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.43) devient,

$$\dot{T} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{V}_G + \dot{\mathbf{L}}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.45)$$

En substituant le théorème du centre de masse (12.15) et le théorème du moment cinétique (12.32) dans les expressions des dérivées temporelles de la quantité de mouvement et du moment cinétique, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.46) s'écrit comme une somme de puissances,

$$\dot{T} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}_G + \sum M_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.46)$$

Le premier terme est la puissance due à l'action des forces extérieures sur le mouvement du centre de masse du solide indéformable et le deuxième terme est la puissance due à l'action des moments de forces extérieures sur le mouvement de rotation propre du solide indéformable autour du centre de masse.

Compte tenu des sommes des forces extérieures et des moments de forces extérieures (11.89), de l'identité sur les vitesses (13.31) et du moment de force extérieure évalué par rapport au centre de masse G ,

$$\mathbf{M}_{G,\alpha}^{\text{ext}} = \mathbf{G} \mathbf{P}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \quad (13.47)$$

la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.46) due à l'action des forces et moments de forces extérieures est mise sous la forme,

$$\dot{T} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\mathbf{v}_\alpha - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) + \sum_{\alpha} (\mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (13.48)$$

A l'aide de l'identité vectorielle d'invariance par permutation cyclique du produit mixte (1.41), on en déduit que,

$$(\mathbf{r}'_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) \cdot \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'_\alpha) \quad (13.49)$$

Compte tenu de l'identité vectorielle (13.49), la dérivée temporelle de l'énergie cinétique (13.48) due à l'action des forces extérieures se réduit à,

$$\dot{T} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_\alpha \quad (13.50)$$

A l'aide des variations infinitésimales $dT = \dot{T} dt$ et $d\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha dt$, la puissance due à l'action des forces extérieures (13.50) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal dt donne le théorème de l'énergie cinétique sous sa forme infinitésimale,

$$dT = \sum_{\alpha} \delta W (\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_\alpha \quad (13.51)$$

où $\delta W (\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}})$ est le travail infinitésimal effectué par la force extérieure $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ exercée sur le point P_α du solide indéformable. Le travail effectué par la force extérieure $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$ sur le point P_α le long du chemin $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$ s'écrit,

$$W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \delta W (\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_\alpha \quad (13.52)$$

et la variation d'énergie cinétique le long de ce chemin est donnée par,

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} dT = \int_{T_2}^{T_1} dT = T_2 - T_1 \quad (13.53)$$

Ainsi, en intégrant la forme infinitésimale du théorème de l'énergie cinétique (13.51) le long du chemin $C_{1 \rightarrow 2}$, compte tenu du travail (13.52) et de la variation d'énergie cinétique (13.53), on obtient le théorème de l'énergie cinétique,

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\alpha} W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \sum_{\alpha} \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (13.54)$$

13.2.4 Roue mal équilibrée

Avant d'aborder les effets gyroscopiques, on considère d'abord le cas d'une roue mal équilibrée dont l'axe de rotation n'est pas un axe principal d'inertie, contrairement à une roue bien équilibrée dont l'axe de rotation est l'axe de symétrie. La roue peut être considérée comme un cylindre qui tourne à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ constante autour d'un axe fixe qui passe par son centre de masse G . Soit $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ le repère d'inertie du cylindre qui est immobile par rapport au cylindre. L'axe principal d'inertie $G\mathbf{e}_3$ est l'axe de symétrie du cylindre qui fait un angle θ constant avec l'axe fixe qui est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ (Fig. 13.5).

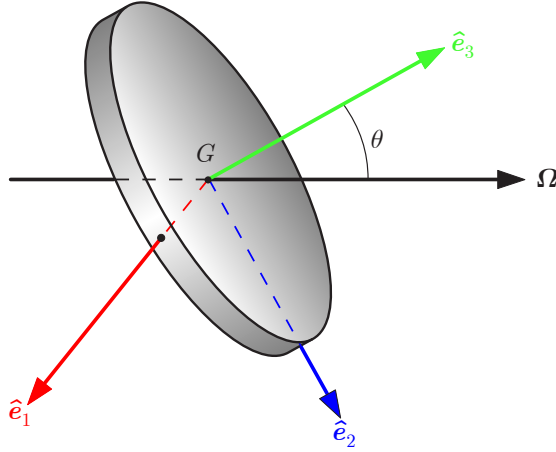


FIGURE 13.5 Cylindre en rotation à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ constante par rapport à un axe fixe qui décrit un angle θ par rapport à son axe de symétrie $G\mathbf{e}_3$.

A l'instant initial $t = 0$, le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_2$ se trouve dans le plan vertical engendré par les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_3$ et $\mathbf{\Omega}$. Les composantes du vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ exprimées dans le repère d'inertie s'écrivent,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega \sin \theta \sin(\Omega t) \\ \Omega_2 &= \Omega \sin \theta \cos(\Omega t) \\ \Omega_3 &= \Omega \cos \theta \end{aligned} \quad (13.55)$$

Le vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ est constant par rapport au référentiel d'inertie de la terre, mais pas par rapport au référentiel accéléré de la roue. Les dérivées temporelles des composantes (13.55) du vecteur vitesse angulaire s'écrivent,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) \\ \dot{\Omega}_2 &= -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) \\ \dot{\Omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (13.56)$$

Le moment d'inertie le long de l'axe de symétrie est $I_{G,\parallel}$ et les moments d'inertie le long des deux autres axes sont $I_{G,\perp}$,

$$I_{G,3} = I_{G,\parallel} \quad \text{et} \quad I_{G,1} = I_{G,2} = I_{G,\perp} \quad (13.57)$$

Compte tenu des expressions (13.55), (13.56) et (13.57), les équations d'Euler (12.60) s'écrivent explicitement,

$$\begin{aligned}\sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,\perp} \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cos(\Omega t) \\ \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= -I_{G,\perp} \Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) + (I_{G,\perp} - I_{G,\parallel}) \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\Omega t) \\ \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= 0\end{aligned}\quad (13.58)$$

D'après l'expression (12.59), la somme des moments de forces $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ exercés par l'axe de rotation sur la roue mal équilibrée s'écrit,

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} &= \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad - \left(I_{G,\perp} + (I_{G,\parallel} - I_{G,\perp}) \cos \theta \right) \Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t) \hat{\mathbf{e}}_2\end{aligned}\quad (13.59)$$

La somme des moments de forces $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ dépend du temps de manière périodique, d'où les secousses périodiques ressenties sur l'axe. Dans la limite où $\theta = 0$, la somme des moments de forces s'annule, c'est-à-dire $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, et la roue devient bien équilibrée. En mesurant la somme des moments de forces exercés sur une roue mal équilibrée en rotation, un garagiste parvient à identifier à quel endroit ajouter des masses sur la jante d'une roue de voiture afin d'équilibrer la roue.



Equilibrage d'une roue

13.3 Gyroscopie et effets gyroscopiques

Un **gyroscope** est une roue ou un disque en rotation dont l'axe de rotation se maintient dans une orientation donnée. La roue est montée sur deux cadrans concentriques qui peuvent tourner autour d'axes orthogonaux passant par son centre de masse. Lorsque la roue est en rotation, l'orientation de l'axe n'est pas modifiée par la rotation des cadrans interne ou externe. Pour cette raison, les gyroscopes sont utiles pour mesurer ou maintenir une orientation donnée. Ils sont par exemple abondamment utilisés en aéronautique.



FIGURE 13.6 Gyroscopie constitué d'un disque en rotation autour d'un axe dont l'orientation ne change pas lors d'une rotation des deux cadrans concentriques sur lesquels l'axe du disque est monté. Les axes de rotation des cadrans sont orthogonaux et ils passent par le centre de masse du disque.

L'invention du gyroscope est due à Léon Foucault. A la suite de sa démonstration expérimentale de la rotation de la terre en 1851 à l'aide d'un pendule accroché au sommet du dôme du Panthéon, il a ensuite développé un instrument capable de maintenir une orientation fixe par rapport au plan du système solaire. Cet instrument destiné à convaincre ses contemporains les plus sceptiques que la terre est réellement en rotation sur elle-même est le gyroscope, dont l'étymologie désigne l'outil qui *permet de voir tourner* la terre. L'axe du gyroscope est fixe par rapport au plan du système solaire, ce qui signifie que, depuis le référentiel en rotation de la terre, l'axe de rotation du gyroscope a un mouvement de précession apparent par rapport à l'axe de rotation de la terre. Pour mettre en évidence cette précession d'une période de 24 heures afin de démontrer expérimentalement la rotation de la terre, il faut que l'axe de rotation du gyroscope soit différent de celui de la terre.

13.3.1 Effets gyroscopiques

Par analogie avec le gyroscope, on parle d'*effets gyroscopiques* pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets gyroscopiques sont liés à la conservation du moment cinétique en absence de moment de force extérieure.

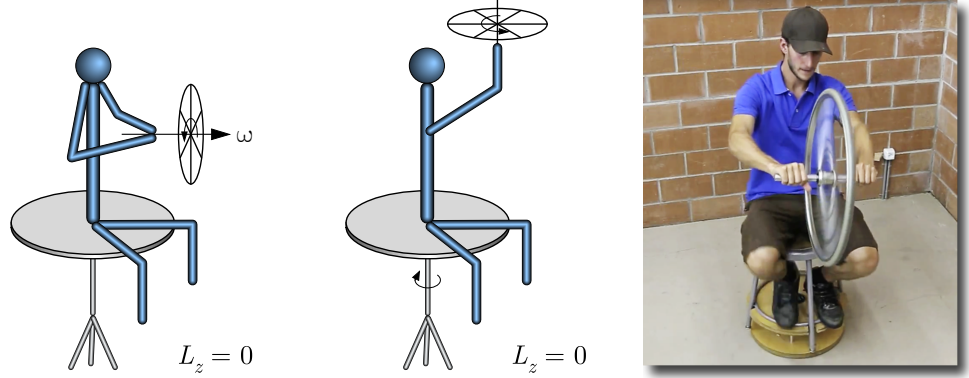


FIGURE 13.7 Une personne assise sur un tabouret, qui peut tourner autour d'un axe vertical déplace une roue en rotation rapide d'une position initiale où la roue tourne dans un plan vertical à une position finale où la roue tourne dans un plan horizontal. En position finale, la personne assise sur le tabouret tourne en sens inverse de la roue.

Comme premier exemple d'effet gyroscopique, on considère une personne assise sur un tabouret tournant autour d'un axe vertical qui tient à bout de bras une roue en rotation rapide autour de son axe de symétrie (Fig. 13.7). Initialement, l'axe de symétrie de la roue est horizontal et la roue tourne dans un plan vertical. Par conséquent, la composante verticale du moment cinétique du système constitué de la personne, du tabouret et de la roue est nulle, c'est-à-dire $L_z = 0$. La personne exerce alors un moment de force sur la roue pour la redresser telle que son axe de symétrie devienne vertical et que sa rotation ait finalement lieu dans un plan horizontal. Comme le moment de force est interne au système, la composante verticale du moment cinétique du système constitué de la personne, du tabouret et de la roue reste nulle, c'est-à-dire $L_z = 0$. Comme la roue tourne finalement dans un plan horizontal, la composante verticale de son moment cinétique est non-nulle. Pour que la composante verticale du moment cinétique du système constitué de la personne, du tabouret et de la roue reste nulle, le tabouret et la personne doivent tourner autour de l'axe vertical du tabouret dans la direction inverse à la roue.



Roues tournant en sens opposé

Si la roue est remplacée par deux roues identiques tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire scalaire de signe opposé, l'effet gyroscopique disparaît car la somme vectorielle des moments cinétiques des deux roues s'annule. Ainsi, lorsqu'on redresse l'axe, la personne et le tabouret restent immobiles.

Lorsqu'une roue est mise en rotation autour de son axe de symétrie et qu'elle est maintenue à bout de bras par une personne, le poids $\mathbf{P}$ de la roue génère un moment de force extérieure $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ sur le poignet O de la personne, où $\mathbf{r} = \mathbf{OG}$ est le bras de levier (Fig. 13.8). Ce moment de force est orienté dans le plan horizontal et il est orthogonal à l'axe de rotation. D'après le théorème du moment cinétique (12.16), c'est-à-dire $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O$, la variation du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ est colinéaire au moment de force extérieure $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$. Par conséquent, l'axe de rotation change d'orientation dans la direction définie par le moment de force extérieure $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$, ce qui conduit à la précession de l'axe de rotation de la roue autour de l'axe vertical. Pour maintenir fixe l'axe de rotation, la personne doit appliquer avec son poignet sur cet axe un moment de force de norme égale et de direction opposée.

Dans le cas d'une roue de vélo tournant autour d'axe attaché à un fil vertical, l'effet gyroscopique est similaire (Fig. 13.8). Le moment de force $\mathbf{M}_O$ généré par le poids $\mathbf{P}$ de la roue au point d'attache O provoque un mouvement de précession de l'axe de la roue autour du fil en vertu du théorème du moment cinétique (12.16).

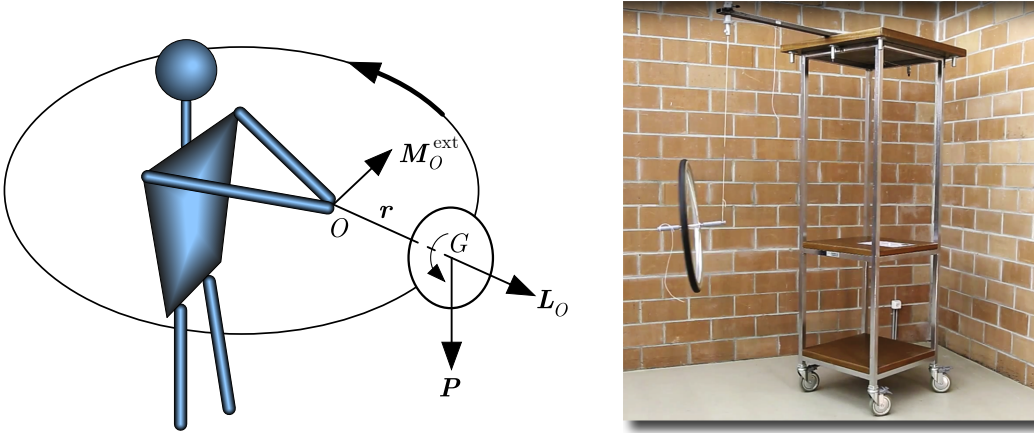


FIGURE 13.8 Le poids d'une roue en rotation autour d'un axe génère un moment de force sur l'axe qui provoque un mouvement de précession de l'axe dans le plan horizontal.

13.3.2 Roue de vélo

On considère une roue de vélo de masse M et de rayon R qui roule sans glisser. Le centre de masse G de la roue est en mouvement circulaire uniforme de rayon $\rho = \text{cste}$ à vitesse angulaire scalaire $\dot{\phi} = \text{cste}$ autour de l'axe vertical $O\hat{z}$ (Fig. 13.9). Le vecteur vitesse angulaire de précession de la roue est $\dot{\phi} = \dot{\phi}\hat{z}$. La roue est en mouvement de rotation propre à vitesse angulaire scalaire $\dot{\psi} = \text{cste}$ autour de l'axe de symétrie Ge_3 . Le vecteur vitesse angulaire de rotation propre de la roue est $\dot{\psi} = -\dot{\psi}\hat{e}_3$. Le plan de rotation de la roue est incliné d'un angle de nutation $\theta = \text{cste}$ par rapport à la verticale. On associe le repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ à la roue. Le repère d'inertie est en général immobile par rapport au solide indéformable afin que les moments d'inertie soient constants. Comme la roue est invariante par rotation autour de l'axe de rotation propre Ge_3 , les deux autres vecteurs de base du repère n'ont pas besoin d'être immobiles par rapport à la roue mais simplement d'être situés dans le plan de la roue. Ainsi, le vecteur $\hat{e}_1 = \hat{\phi}$ ne suit pas le mouvement de rotation propre de la roue et se trouve en tout temps dans le plan horizontal qui contient le centre de masse G . Le vecteur $\hat{e}_2$ ne suit pas non plus le mouvement de rotation propre de la roue et se trouve en tout temps dans le plan vertical qui contient le centre de masse G et le vecteur $\hat{e}_3$. On considère que le rayon de courbure ρ est suffisamment grand par rapport au rayon R de la roue, c'est-à-dire $R \ll \rho$, et que la roue est un cylindre creux d'épaisseur négligeable et de rayon R , c'est-à-dire que toute la masse M de la roue se trouve sur sa circonférence à distance R du centre de masse.

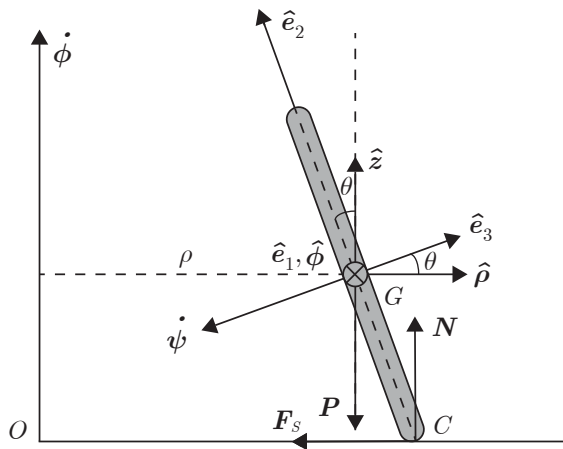


FIGURE 13.9 Une roue de vélo a un mouvement de précession uniforme autour de l'axe vertical et un mouvement de rotation propre uniforme autour de l'axe de symétrie de la roue.

A présent, on va se livrer à l'analyse de la dynamique de la roue afin de déterminer

l'expression explicite de l'angle θ que prend le plan de la roue de vélo par rapport à un plan vertical. Pour commencer, on détermine les grandeurs cinématiques d'intérêt. Le vecteur vitesse angulaire totale $\boldsymbol{\Omega}$ est la somme du vecteur vitesse angulaire de précession $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ et du vecteur vitesse angulaire rotation propre $\dot{\boldsymbol{\psi}}$,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} - \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.60)$$

La vitesse $\mathbf{V}_G$ du centre de masse qui suit un mouvement circulaire de rayon ρ et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$ dans un plan horizontal s'écrit,

$$\mathbf{V}_G = V_G \hat{\boldsymbol{\phi}} = \rho \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \rho \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (13.61)$$

Comme la roue roule sans glisser, compte tenu de l'expression (12.14), la vitesse du centre de masse s'écrit,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} = (\dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}_3) \times R \hat{\mathbf{e}}_2 = -R (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (13.62)$$

En identifiant les expressions (13.61) et (13.62) de la vitesse du centre de masse $\mathbf{V}_G$, on obtient l'identité suivante,

$$-R (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) = \rho \dot{\phi} \quad (13.63)$$

Compte tenu de l'identité (13.63), le vecteur vitesse angulaire totale (13.60) est mis sous la forme,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 - \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.64)$$

On détermine maintenant les grandeurs dynamiques d'intérêt. Les trois forces extérieures qui sont exercées sur la roue sont le poids $\mathbf{P} = -Mg \hat{\mathbf{z}}$, qui est exercé au centre de masse G de la roue, la force de réaction normale $\mathbf{N}$ et la force de frottement statique $\mathbf{F}_S$ exercée sur la roue par le sol au point de contact C entre la roue et le sol. Comme la force de réaction normale $\mathbf{N}$ et la force de frottement statique sont inconnues, il est judicieux d'évaluer le moment cinétique et le moment de force extérieure résultant exercés sur la roue par rapport au point C . Le moment de force extérieure $\mathbf{M}_C^{\text{ext}}$ évalué au point de contact C de la roue avec le sol est uniquement dû au poids,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C^{\text{ext}} &= \mathbf{CG} \times \mathbf{P} = R \hat{\mathbf{e}}_2 \times (-Mg \hat{\mathbf{z}}) = -MRg \hat{\mathbf{e}}_2 \times (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= -MRg \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 = -MRg \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (13.65)$$

Compte tenu des composantes de la vitesse angulaire (13.64), le moment cinétique évalué au point de contact C s'écrit,

$$\mathbf{L}_C = I_{C,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{C,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = I_{C,2} \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.66)$$

Afin de pouvoir utiliser les formules de Poisson en coordonnées cylindriques, on utilise le changement de base suivant,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\sin \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \cos \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (13.67)$$

A l'aide du changement de base (13.67), le moment cinétique (13.66) évalué au point de contact C devient,

$$\mathbf{L}_C = I_{C,2} \dot{\phi} \cos \theta (-\sin \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \dot{\phi} (\cos \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (13.68)$$

Etant donné que le rayon de courbure de la trajectoire circulaire est constant, c'est-à-dire $\rho = \text{cste}$, l'angle d'inclinaison de la roue est constant, c'est-à-dire $\theta = \text{cste}$, la vitesse angulaire de précession est constante, c'est-à-dire $\dot{\phi} = \text{cste}$, et le vecteur unitaire vertical est constant, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{z}} = \text{cste}$, la dérivée temporelle du moment cinétique (13.68) évalué au point de contact C s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_C = -\left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R}\right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (13.69)$$

Compte tenu de la formule de Poisson (5.6) en coordonnées cylindriques, la dérivée temporelle du moment cinétique (13.69) devient,

$$\dot{\mathbf{L}}_C = - \left(I_{C,3} + \frac{R}{\rho} I_{C,2} \sin \theta \right) \frac{\rho}{R} \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.70)$$

On modélise la roue comme un cylindre caractérisé par le coefficient $\lambda \in [1/2, 1]$, où $\lambda = 1/2$ correspond à un cylindre plein et $\lambda = 1$ correspond à un cylindre creux. Alors, les moments d'inertie du cylindre évalué au point de contact C sont liés aux moments d'inertie des cylindres évalués au centre de masse G par le théorème de Huygens-Steiner (13.26),

$$\begin{aligned} I_{C,2} &= I_{G,2} = \frac{\lambda}{2} MR^2 & (\text{même axe}) \\ I_{C,3} &= I_{G,3} + MR^2 = \lambda MR^2 + MR^2 = (\lambda + 1) MR^2 & (\text{axes différents}) \end{aligned} \quad (13.71)$$

Compte tenu des moments d'inertie la dérivée temporelle du moment cinétique (13.70) devient,

$$\dot{\mathbf{L}}_C = - \left((\lambda + 1) + \frac{\lambda}{2} \frac{R}{\rho} \sin \theta \right) MR \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.72)$$

Dans la limite où le rayon de la roue est nettement plus petit que le rayon de courbure de la trajectoire circulaire, c'est-à-dire $R \ll \rho$, la dérivée temporelle du moment cinétique (13.72) se réduit à,

$$\dot{\mathbf{L}}_C = - (\lambda + 1) MR \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.73)$$

Le théorème du moment cinétique (12.31) appliqué au point de contact C se réduit à,

$$\mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_C \quad (13.74)$$

compte tenu du fait que la vitesse du point de contact est nulle, c'est-à-dire $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$. En substituant les équations (13.65) et (13.70) dans le théorème du moment cinétique (13.74) compte tenu de l'expression (13.61), on obtient la condition suivante sur l'angle θ ,

$$(\lambda + 1) \rho \dot{\phi}^2 \cos \theta = g \sin \theta \quad (13.75)$$

qui est remise en forme comme,

$$\tan \theta = (\lambda + 1) \frac{\rho \dot{\phi}^2}{g} = (\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{\|\mathbf{A}_G\|}{g} \quad (13.76)$$

où $\tan \theta$ est une fonction monotone croissante de θ . Ainsi, l'angle d'inclinaison de la roue est,

$$\theta = \arctan \left((\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} \right) \quad (13.77)$$

L'interprétation physique de la condition (13.77) permet de comprendre les effets gyroscopiques associés à la dynamique d'une roue de vélo dans un virage. Pour une roue de vélo qui roule à une vitesse V_G fixée, plus le rayon de courbure ρ du virage diminue plus l'angle d'inclinaison vertical θ augmente et vice versa. Pour une roue de vélo qui prend un virage dont le rayon de courbure ρ est fixé, plus la vitesse V_G augmente plus l'angle d'inclinaison θ augmente et inversement. Les moto de course ont un grand angle d'inclinaison θ dans les virages car leur vitesse V_G est très élevée.



Moto dans un virage

13.3.3 Toupie

On considère une toupie en rotation par rapport à son axe de symétrie $O \hat{\mathbf{e}}_3$. On suppose que le point de contact O entre la toupie et le sol est fixe. La toupie a un mouvement de précession de vitesse angulaire $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$, un mouvement de nutation de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{\phi}$ et un mouvement de rotation propre de vitesse angulaire $\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3$. On associe le repère d'inertie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ à la toupie (Fig. 13.10). Le repère d'inertie est en général immobile par rapport au solide indéformable afin que les moments d'inertie soient constants. Comme la toupie est invariante par rotation autour de l'axe de rotation propre Ge_3 , les deux autres vecteurs de base du repère n'ont pas besoin d'être immobiles par rapport à la roue mais

simplement d'être situés dans le plan orthogonal à l'axe de symétrie de la toupie. Ainsi, le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ne suit pas le mouvement de rotation propre de la toupie et se trouve en tout temps dans le plan horizontal qui contient le centre de masse G . Le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ne suit pas non plus le mouvement de rotation propre de la toupie et se trouve en tout temps dans le plan vertical qui contient le centre de masse G et le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_3$.

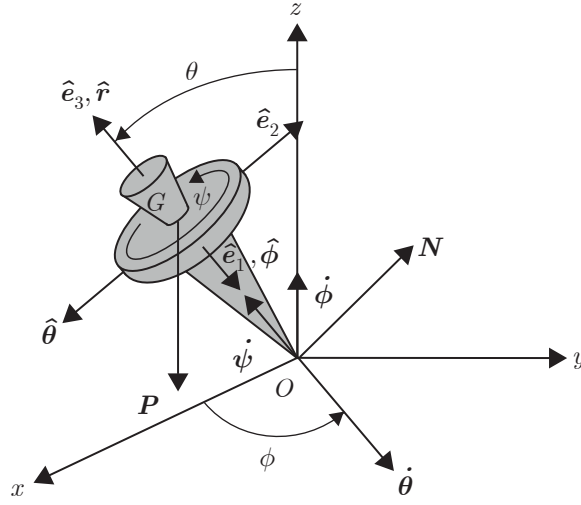


FIGURE 13.10 Une toupie, dont le point de contact avec le sol est immobile, a un mouvement de précession par rapport à l'axe vertical, un mouvement de nutation par rapport à un axe horizontal et un mouvement de rotation propre par rapport à son axe de symétrie.

La vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation de la toupie s'écrit,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3 = \dot{\phi} (\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) + \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (13.78)$$

Les deux forces extérieures qui sont exercées sur la toupie sont le poids $\mathbf{P} = -Mg \hat{\mathbf{z}}$, qui est exercé au centre de masse G de la toupie, et la force de réaction normale $\mathbf{N}$ exercée sur la toupie par le sol au point de contact O entre la toupie et le sol. Comme la force de réaction normale $\mathbf{N}$ est inconnue, il est judicieux d'évaluer le moment cinétique et le moment de force extérieure unique exercé sur la toupie par le poids par rapport au point O . Le théorème du moment cinétique (12.16) appliqué au point de contact O se réduit lors à,

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O \quad (13.79)$$

Le moment de force extérieure $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ évalué au point de contact O de la toupie avec le sol est uniquement dû au poids,

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OG} \times \mathbf{P} = (\ell \hat{\mathbf{e}}_3) \times (-Mg \hat{\mathbf{z}}) = -Mg \ell \hat{\mathbf{e}}_3 \times (\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) = Mg \ell \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (13.80)$$

où $\|\mathbf{OG}\| \equiv \ell$. Le moment d'inertie le long de l'axe de symétrie est $I_{O,\parallel}$ et les moments d'inertie le long des deux autres axes sont $I_{O,\perp}$,

$$I_{O,1} = I_{O,2} \equiv I_{O,\perp} \quad \text{et} \quad I_{O,3} \equiv I_{O,\parallel} \quad (13.81)$$

Le moment cinétique (12.52) évalué par rapport au point O s'écrit,

$$\mathbf{L}_O = I_{O,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{O,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{O,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.82)$$

Compte tenu des composantes du vecteur vitesse angulaire (13.78), le moment cinétique (13.82) devient,

$$\mathbf{L}_O = I_{O,1} \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{O,2} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{O,3} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (13.83)$$

Compte tenu des moments d'inertie (13.81) et des relations entre les vecteurs unitaires,

c'est-à-dire $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_3$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{e}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{e}}_1$, le moment cinétique (13.83) est exprimé dans le repère cylindrique comme,

$$\mathbf{L}_O = I_{O,\perp} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\mathbf{r}} \quad (13.84)$$

La dérivée temporelle du moment cinétique (13.84) s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_O = & I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} - I_{O,\perp} (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{\mathbf{r}} \\ & + I_{O,\perp} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \dot{\boldsymbol{\theta}} + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\hat{\mathbf{r}}} \end{aligned} \quad (13.85)$$

A l'aide des relations (5.16) pour les dérivées temporelles des vecteurs de base d'un repère sphérique, l'expression (13.85) devient,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_O = & I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{\mathbf{r}} \\ & + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - I_{O,\perp} (\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (13.86)$$

En substituant les équations (13.80) et (13.86) dans le théorème du moment cinétique (13.79), et en le projetant selon les lignes de coordonnées sphériques de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ respectivement, on obtient les trois équations d'Euler,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{r}} : & I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) = 0 \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : & I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\theta} - I_{O,\perp} (\ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) = 0 \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : & I_{O,\perp} \ddot{\theta} + (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = Mg \ell \sin \theta \end{aligned} \quad (13.87)$$

Dans le cas particulier où le mouvement de nutation de la toupie est négligeable,

$$\theta = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (13.88)$$

les équations d'Euler (13.87) se réduisent à,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{r}} : & I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta) = 0 \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : & I_{O,\perp} \ddot{\phi} \sin \theta = 0 \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : & (I_{O,\parallel} - I_{O,\perp}) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = Mg \ell \sin \theta \end{aligned} \quad (13.89)$$

Les deux premières équations d'Euler impliquent que la vitesse angulaire de précession $\dot{\phi}$ et la vitesse angulaire de rotation propre $\dot{\psi}$ sont des constantes,

$$\ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{\phi} = \text{cste} \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \text{cste} \quad (13.90)$$

Dans la limite où la précession est lente par rapport à la rotation propre,

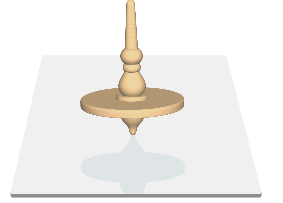
$$\dot{\phi} \ll \dot{\psi} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\phi}^2 \ll \dot{\psi} \dot{\phi} \quad \text{et} \quad I_{O,\parallel} \dot{\psi} \dot{\phi} = Mg \ell \quad (13.91)$$

la troisième équation d'Euler (13.89) montre que la vitesse angulaire de précession $\dot{\phi}$ est inversement proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation propre $\dot{\psi}$,

$$\dot{\phi} = \frac{Mg \ell}{I_{O,\parallel} \dot{\psi}} \quad (13.92)$$

A l'aide d'une roue de vélo et de deux axes, on peut réaliser une toupie qui permet de mettre en évidence les mouvements de précession, de nutation et de rotation propre (Fig. 13.11).

Un anagyre est une espèce de toupie de forme très particulière qui a un mouvement de précession dans un seul sens. Si on lance l'anagyre dans le sens de rotation naturel, il tourne rapidement. Si on le lance dans le sens opposé, il s'arrête rapidement et repart dans le sens opposé. A première vue, l'anagyre semble être un demi ellipsoïde de révolution, mais en réalité il s'agit d'un ellipsoïde coupé selon un plan qui ne contient pas deux axes de symétrie (Fig. 13.12). Lorsqu'il est lancé dans le bon sens, l'axe de rotation est un axe principal d'inertie. Lorsqu'il est lancé dans le mauvais sens, l'axe de rotation n'est pas un axe principal d'inertie, ce qui donne lieu à un mouvement de tangage et de roulis — généré



Toupie

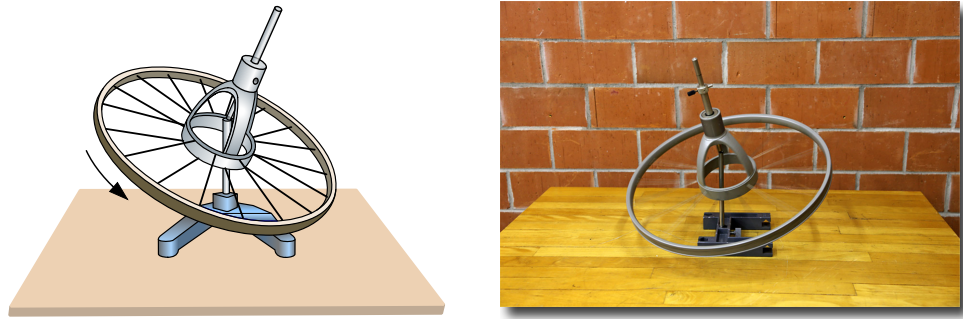


FIGURE 13.11 Toupie constituée d'un roue de vélo en rotation propre autour de son axe de symétrie, en précession autour de l'axe vertical et en nutation autour d'un axe horizontal.

par un moment de forces extérieures résultant comme pour la roue mal équilibrée — qui augmente au cours du temps et finit par arrêter le mouvement de précession de l'anagyre et à le relancer dans le sens opposé...



FIGURE 13.12 Anagyre dont le mouvement de précession n'est stable que dans un seul sens de rotation.